MA2115 Matemáticas IV (semi-presencial)
Práctica 03

Boris Iskra

enero – marzo 2010

1. Series alternantes.
2. Series de potencias.
3. Series de MacLaurin y Series de potencias de funciones.

Ejemplo 1

Diga si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{10}}$ *converge o diverge*

$$\text{Aqui } a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{10}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{10}} = 1 \neq 0$$

La serie diverge. $\square$

Ejemplo 2

$$\textit{Diga si la serie } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \textit{ converge o diverge}$$

$$\text{Aqui } a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

La series NO converge absolutamente.
Claramente: $a_{n+1} < a_n$ por lo cual, la series converge.
La serie converge condicionalmente. $\square$

Ejemplo 3

Diga si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)^2}$ *converge o diverge*

$$\text{Aqui } a_n = \frac{1}{(3n+1)^2}.$$

La serie converge absolutamente.

Ejemplo 4

Diga si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln^2(n)}{n}$ *converge o diverge*

$$\text{Aqui } a_n = \frac{\ln^2(n)}{n}.$$

La serie NO converge absolutamente pues $\frac{\ln^2(n)}{n} > \frac{1}{n}$.
Considero la función $f(x) = \frac{\ln^2(x)}{x}$.
Cuya derivada es: $f'(x) = \frac{\ln(x)(2-\ln(x))}{x^2} < 0$ si $x > e^2 > 7$.
Por lo tanto, a_n es decreciente, si $n > 7$
y la series converge condicionalmente.

Ejemplo 1

Halle el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{2^{n-1}|x|^{2n-1}}{(4n-3)^2}} = \frac{2^{1-\frac{1}{n}}|x|^{2-\frac{1}{n}}}{(4n-3)^{\frac{2}{n}}}$$

Tomado límite, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 2|x|^2.$$

La serie converge absolutamente si, $2|x|^2 < 1$,

es decir $-\sqrt{\frac{1}{2}} < x < \sqrt{\frac{1}{2}}$. □

Ejemplo 1

[¿ Qué pasa en $-\sqrt{\frac{1}{2}}$ y en $\sqrt{\frac{1}{2}}$?.]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^{2n-1}}{(4n-3)^2} \text{ con } x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{2n-1}}{(4n-3)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{\sqrt{2}(4n-3)^2}$$

Similarmente, para $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ tenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^{2n-1}}{(4n-3)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}(4n-3)^2}$$

Ambas convergen absolutamente,

el intervalo de convergencia es : $\left[-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right]$.

Ejemplo 2

Halle el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n\,3^n \ln(n)}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^{n-1}}{n\,3^n \ln(n)}\right|}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{1-\frac{1}{n}}}{3\sqrt[n]{n\ln(n)}} = \frac{|x|}{3}.\end{aligned}$$

La serie converge absolutamente si,
$|x| < 3$, es decir $-3 < x < 3$. $\square$

Ejemplo 2 (¿ Qué pasa en -3 y en 3 ?.)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n 3^n \ln(n)} \text{ con } x = -3$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{n 3^n \ln(n)}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n \ln(n)} \text{ converge}$$

Similarmente, para $x = 3$ tenemos:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n\, 3^n \ln(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3n \ln(n)} \text{ diverge}$$

El intervalo de convergencia es : $[-3, 3)$.

Ejemplo 3

Halle el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{2n\,4^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(x+5)^{2n-1}}{2n\,4^n}\right|}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|x+5|^{2-\frac{1}{n}}}{4\sqrt[n]{2n}} = \frac{|x+5|^2}{4} < 1.$$

La serie converge absolutamente si, $\frac{|x+5|}{2} < 1$, es decir $-2 < x+5 < 2$ o $-7 < x < -3$. $\square$

Ejemplo 3 (¿ Qué pasa en -7 y en -3 ?.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{2n\,4^n} \text{ con } x = -7$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{2n-1}}{2n\,4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{4n} \text{ diverge}$$

Similarmente, para $x = -3$ tenemos:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{2n\,4^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4n} \text{ diverge}$$

El intervalo de convergencia es : $(-7, -3)$.

Ejemplo 4

Halle el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-1)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-1)^n\right|}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} |x-1| = e\,|x-1| < 1.$$

La serie converge absolutamente si, $|x-1| < \frac{1}{e}$,
es decir $1 - \frac{1}{e} < x < 1 + \frac{1}{e}$. $\square$

Ejemplo 4 (¿ Qué pasa en $1-\frac{1}{e}$ y en $1+\frac{1}{e}$?.)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}(x-1)^n \text{ con } x=1-\frac{1}{e}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n} \text{ diverge pues}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}=\frac{1}{\sqrt{e}}\neq 0 \qquad \text{no trivial.}$$

Similarmente, para $x=1+\frac{1}{e}$ diverge, pues el término general no tiende a cero.
El intervalo de convergencia es : $\left(1-\frac{1}{e},1+\frac{1}{e}\right)$.

Ejemplo 1

Halle la serie de MacLaurin de la función

$$f(x) = \frac{3x-5}{x^2-4x+3} = \frac{3x-5}{(x-3)(x-1)} = \frac{2}{x-3} + \frac{1}{x-1}$$

$$\frac{2}{x-3} = -\frac{2}{3}\,\frac{1}{1-\frac{x}{3}} = -\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n \text{ si } |x| < 3$$

y

$$\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{1-x} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ si } |x| < 1.$$

Por lo tanto:

$$f(x) = -\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3^{n+1}} + 1\right) x^n \text{ si } |x| < 1. \qquad \square$$

Ejemplo 2

Desarrollar $f(x) = \frac{1}{x}$ *en series de potencia de* $x - 2$

$$f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{2 + x - 2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1 + \frac{x-2}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-2)^n}{2^{n+1}}$$

La serie converge absolutamente si, $\frac{|x-2|}{2} < 1$,
es decir $0 < x < 4$. □

Ejemplo 3

Hallar los primeros cuatro términos no nulos de la serie de potencias de la función $f(x) = e^{\arctan(x)}$.

Hallamos las primeras tres derivadas.

$$f(x) = e^{\arctan(x)} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{e^{\arctan(x)}}{1 + x^2} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{e^{\arctan(x)}(1 - 2x)}{(1 + x^2)^2} \qquad f''(0) = 1$$

$$f'''(x) = \frac{e^{\arctan(x)}(6x^2 - 6x - 1)}{(1 + x^2)^3} \qquad f'''(0) = -1$$

Por lo tanto:

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \cdots . \qquad \square$$

Ejemplo 4

Hallar los primeros cuatro términos no nulos de la serie de potencias de la función $f(x) = \ln(1 + e^x)$.

Hallamos las primeras tres derivadas.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1 + e^x) & f(0) &= \ln(2) \\
f'(x) &= \frac{e^x}{1 + e^x} & f'(0) &= 1/2 \\
f''(x) &= \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} & f''(0) &= 1/4 \\
f'''(x) &= \frac{e^x(1 - e^x)}{(1 + e^x)^3} & f'''(0) &= 0 \\
f^{(iv)}(x) &= \frac{e^x(e^{2x} - 4e^x + 1)}{(1 + e^x)^4} & f^{(iv)}(0) &= -1/8
\end{aligned}
$$

Por lo tanto:

$$f(x) = \ln(2) + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{192} + \cdots . \quad \square$$

Ejemplo 5

Desarrollar $f(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(t^2)dt$ *en series de potencias.*

$$\text{Sabemos que } \operatorname{sen}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\text{de donde obtenemos } \operatorname{sen}(t^2) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{4n+2}}{(2n+1)!}.$$

$$\text{integrando término a término } \int \operatorname{sen}(t^2) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!}.$$

Por lo tanto:

$$f(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(t^2)dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!}. \qquad \square$$

FIN